

文章编号:1000-8055(2011)02-0422-06

基于名义极限因子和降维方法的 涡轮盘结构可靠性优化

杨俊杰, 王荣桥, 樊江, 申秀丽

(北京航空航天大学 能源与动力工程学院, 北京 100191)

摘 要: 结合名义极限因子方法完全实现了可靠性分析与优化过程的解耦,使可靠性分析成为进行优化之前的预分析过程,而在预分析中采用的基于降维的可靠性分析技术,在一阶可靠度方法(FORM)获得的计算结果的基础上进行适量的数值计算就能够提高可靠性分析的结果.最后,以某涡轮盘结构优化为例对提出的方法可行性和效率进行了验证,结果表明:该方法在优化效率上比传统的双循环优化过程(DLP)方法要高,更接近确定性优化的水平.

关 键 词: 可靠性优化; 名义极限因子; 一阶可靠度方法; 降维方法; 涡轮盘结构优化

中图分类号: V232.4

文献标识码: A

Nominal limit state factor and dimension reduction method in reliability optimization for turbine disk

YANG Jun-jie, WANG Rong-qiao, FAN Jiang, SHEN Xiu-li

(School of Jet Propulsion,

Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China)

Abstract: Computing intensity and cost-consuming are two important difficulties in reliability-based design optimization (RBDO). the single-looping optimization (SLO) methods and the double-looping optimization (DLO) methods cannot deal with them. Some based on the inverse most probable point (MPP) transforms the probabilistic constraints to deterministic constraints, but they cannot decouple the two procedures including reliability analysis and optimization, in additional, there are too large errors because of using the first order reliability methods (FORM) in the methods to be adaptive in aero-engine design. The nominal limit state factor method was proposed that can decouple the two procedures of reliability analysis and optimization and can make the reliability analysis become a pre-procedure before optimization. Moreover, the uni-variate dimension reduction method was used to obtain accurate probability of failure that only requires the results of FORM in previous reliability analysis. Finally, an example on structure optimization for turbine disk was given to illustrate that the proposed methods are more efficient than the DLP method and are close to the deterministic optimization in efficiency.

Key words: reliability optimization; nominal limit state factor;
first order reliability methods (FORM); dimension reduction method;
structure optimization for turbine disk

收稿日期:2010-01-17; 修订日期:2010-07-06

基金项目:航空科学基金(1404-003F); 新世纪优秀人才项目(NCET-07-0042)

作者简介:杨俊杰(1978—),男,河南叶县人,博士生,主要研究方向为航空发动机多学科优化. E-mail:junjiey@sjp.buaa.edu.cn

在航空发动机的传统设计中,通常采用确定性的模型和参数,对于设计过程中需要考虑的载荷、材料、几何尺寸、边界条件等通常进行简化假设为确定性,根据经验或判断使用其极限值、平均值或者安全因子等方法。尽管这种确定性的设计方法取得了很大的成功,但是由于这些因素中存在不确定性,从简化的确定性模型获得的最优设计在考虑不确定性的情况下仍然可能是一个不可行解,或者是一个过保守设计。传统的安全因子方法考虑不确定性常常导致不经济的过设计。基于可靠性的多学科优化设计在设计过程中充分考虑各种随机因素的影响,把结构可靠性作为设计目标或约束,保证获得的设计是在一定可靠度意义下的最优设计。

计算强度大和计算效率不高一直是制约航空发动机优化设计的两大难题,对于基于可靠性的多学科优化设计来说表现更为突出。单循环优化过程(single-looping optimization,简称SLO)和双循环优化过程(double-looping optimization,简称DLO)是最常用可靠性优化过程^[1-3],都不能从根本上消除这些困难,导致在实际的发动机设计中很难得到应用,而其他的一些基于反最可能失效点(most probable point,简称MPP)搜索的优化过程^[3-4]虽然可以把基于可靠性优化中的概率约束转化为确定性约束,在提高计算效率、降低了计算强度方面取得一定成效,但是并没有从根本上把可靠性分析从优化过程中解耦。并且,这些方法中很多是基于一阶可靠度方法(first order reliability method,简称FORM)的,结果的精度也存在较大误差,而采用二阶可靠度方法(second order reliability method,简称SORM)等高阶方法计算强度过大难以承受,都限制它们在航空发动机这样对可靠性要求较高的工程系统上的应用。本文采用的基于名义极限因子的可靠性优化方法,通过一个可靠性预分析,在优化过程开始之前对可靠性分析与优化过程进行解耦,使基于可靠性的优化完全转化为一个普通的确定性优化问题;同时在预分析过程中采用基于降维的可靠性分析方法,能够提高可靠性分析的准确性。

1 可靠性结构优化方法

设 Z 为系统的随机设计参数, X 为系统设计变量,系统的性能函数 $G=G(Z, X)$,对应的界限函数为 S ,则其极限状态函数可以定义为 $R(Z, X)=G(Z, X)/S$,相应的系统的失效域可以定义

为 $F=\{(Z, X):R(Z, X)>1\}$,则一般工程系统问题的可靠性优化问题可以描述为如下形式:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(X) \\ \text{s. t.} \quad & P(R_i(Z, X) \geq 1) \leq P_F^* \quad (i=1, \dots, n) \\ & c_j(X) \geq 0 \quad (j=1, \dots, m) \end{aligned} \quad (1)$$

其中 $f(X)$ 表示系统的目标函数,一般为系统的价值花费函数或者其等价函数(如体积、质量等), $c_j(X) \geq 0$ 表示确定性约束, $P(R_i(Z, X) \geq 1) \leq P_F^*$ 表示系统的概率约束条件, P_F^* 表示系统的目标失效概率。其涵义可以理解为在满足系统失效概率不大于 P_F^* 和确定性约束的条件下找到实现系统的最经济设计。

1.1 名义极限因子法

系统的概率约束可以改写为下面的形式:

$$P(F|X) = P(R(Z, X) > 1|X) \leq P_F^* \quad \forall X \in D \quad (2)$$

其中 D 表示设计变量 X 的可行设计空间。其涵义为对于任一可行设计 X ,必须保证该设计的失效概率不大与系统要求的目标概率约束。如果存在一个函数 $\eta(X)$,满足

$$P(R(Z, X) - \eta(X)R_n(X) > 0|X) = P_F^* \quad \forall X \in D \quad (3)$$

则可以证明下面两种表述是等价的

$$P(R(Z, X) > 1|X) \leq P_F^* \quad (4)$$

$$\eta(X)R_n(X) \leq 1 \quad (5)$$

称其中的函数 $R_n(X)$ 为名义极限状态函数, $\eta(X)$ 为名义极限状态因子,又称为名义极限因子或者安全系数^[5-6]。所以, $\eta(X)$ 又可以写作下面的形式:

$$P\left(\frac{R(Z, X)}{R_n(X)} > \eta(X)|X\right) = P_F^* \quad \forall X \in D \quad (6)$$

数值试验证明,如果选择一个恰当的名义极限状态函数 $R_n(X)$,尽管 $R(Z, X)$ 和 $R_n(X)$ 都是 X 的函数,但是 $R(Z, X)/R_n(X)$ 并不随 X 发生显著变化,即可以近似认为 $\eta(X)$ 为一个常数,记为 η 。这样,基于可靠性的优化问题(1)中的概率约束式(4)就可以转化为不包含随机参数 Z 的确定性约束式(5)的形式,从而使可靠性优化问题可以按照普通的确定性优化方法处理。

设 $M=R(Z, X)/R_n(X) - \eta(X)$,则方程(3)又可以写做下面的形式:

$$P(M > 0|X) = P_F^* \quad \forall X \in D \quad (7)$$

应用中直接求出目标失效概率所对应的 η 比较困难,实际计算中,一般可以通过式(7)得到一

组 (η, P_F^*) 样本, 然后通过最小二乘法等数学手段得到给定目标概率下的名义极限因子^[7].

1.2 基于降维方法的可靠性分析技术

为了获得一组 (η, P_F^*) 的样本, 需要对系统进行可靠性分析, 对给定的 η 求得相应的失效概率. 可靠性分析的方法又可以分为两大类: 解析方法和仿真方法. 前者包括 FORM/SORM 以及基于此的许多变种方法, 后者则主要是基于蒙特卡洛仿真(MCS)的各种样本抽样仿真方法, 如重要抽样(importance sampling, 简称 IS)方法^[8]、马尔科夫链蒙特卡洛(Markov chain Monte Carlo, 简称 MCMC)仿真^[9]等. 对于涉及复杂有限元计算的较大规模的非线性问题, 无论是采用经典概率方法还是基于条件概率和贝叶斯理论的迭代抽样方法(如 MCMC 仿真), 时间花费都无法承受, 普遍采用的方法是 MCS 与近似模型的结合^[10-11], 结果很依赖近似模型的精确性. 采用解析方法需要较少的样本计算, 但是需要进行一阶或二阶偏导数的计算, 对于非显式的性能函数而言, 计算强度较大. 但是在与近似模型结合之后, 能够有效的克服这个问题. 对于非线性问题, FORM 的结果误差较大, 而 SORM 由于要计算二阶偏导数显得过于复杂. 基于降维方法(dimension reduction method, 简称 DRM)的可靠性分析则能够仅仅利用 FORM 中得到的一阶偏导数计算结果, 不需要计算二阶偏导数就可以达到较高的精度^[12-14].

设 $M(Z) = M(Z, X | X^*, \eta)$, 表示设计点 X^* 处的 $\eta = \eta_p$ 时的性能函数. 设

$$Z = \{z_1, z_2, \dots, z_n\},$$

其中 $z_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2) (i=1, \dots, n)$, n 表示随机变量的维数, $N(\mu, \sigma^2)$ 表示正态分布空间. 令: $u_i = (z_i - \mu_i) / \sigma_i$, 则: $u_i \sim N(0, 1)$. 设

$$U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}, \text{ 则 } H(U) = M(Z(U))$$

表示在 U 空间中性能函数. 设由 FORM 获得的 MPP 为

$$U^* = \{u_1^*, u_2^*, \dots, u_n^*\},$$

对应于 Z 空间的点为

$$z^* = \{z_1^*, z_2^*, \dots, z_n^*\}, \text{ 则 } \beta = \|U^*\|$$

为使用 FORM 得到的可靠性指数. 设 V 空间为 U 空间旋转后的空间, 则 V 空间仍为标准正态空间, 并使得 u^* 对应于 V 空间的坐标为

$$V^* = \{v_1^*, v_2^*, \dots, v_n^*\} = \{0, 0, \dots, \beta\},$$

该转换可以通过 Gram-Schmidt 正交化过程实现, 设

$$y(V) = H(U(V)) = M(Z(U(V))),$$

则 $y(V)$ 为性能函数在 V 空间的表述形式.

考虑一种单变量分解

$$y(V) \equiv y(v_1, v_2, \dots, v_n) = \sum_{i=1}^n y(v_1^*, \dots, v_{i-1}^*, v_i, v_{i+1}^*, \dots, v_n^*) - (n-1)y(V^*) \quad (9)$$

令

$$y(v_i) = y(v_1^*, \dots, v_{i-1}^*, v_i, v_{i+1}^*, \dots, v_n^*)$$

则式(9)可写为

$$y(V) \equiv y(v_1, v_2, \dots, v_n) = \sum_{i=1}^n y(v_i) - (n-1)y(V^*) \quad (10)$$

取 $y(v_n)$ 在 v^* 处的线性 Taylor 展开, 得

$$y(v_n) = y(V^*) + \frac{\partial y}{\partial v_n} \bigg|_{v^*} (v_n - \beta) \quad (11)$$

把方程(11)代入到方程(10)中, 并令

$$b = \frac{\partial y}{\partial v_n} \bigg|_{v^*}$$

得

$$y(V) \equiv y(v_1, v_2, \dots, v_n) = \sum_{i=1}^{n-1} y(v_i) + b(v_n - \beta) - (n-2)y(V^*) \quad (12)$$

又 $V \sim N(0, 1)$, 则

$$\begin{aligned} P\{M(Z) > 0\} &= P\{y(V) > 0\} = \\ P\left\{\sum_{i=1}^{n-1} y(v_i) + b(v_n - \beta) - (n-2)y(V^*) > 0\right\} &= \\ P\left\{v_n < -\beta + \frac{1}{b} \left[\sum_{i=1}^{n-1} y(v_i) - (n-2)y(V^*)\right]\right\} &= \\ \Phi\left[-\beta + \frac{1}{b} \left[\sum_{i=1}^{n-1} y(v_i) - (n-2)y(V^*)\right]\right] & \quad (13) \end{aligned}$$

根据文献[14]的推导, 按照 Gauss-Hermite 求积公式对式(13)进行数值积分, 可得

$$P_F^{\text{drm}} = \frac{\prod_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^m w_j \Phi\left[-\beta + \frac{y(v_i^j)}{b}\right]}{\Phi\left[-\beta + \frac{y(V^*)}{b}\right]^{n-2}} \quad (14)$$

其中 v_i^j 为积分点, w_j 为加权值, m 为积分点的个数, 按照 Gauss-Hermite 求积公式, 选择求积节点 (v_i^j) 和求积系数 (w_j) 计算 P_F^{drm} .

2 涡轮盘结构可靠性优化

某涡轮盘的有限元模型如图 1 所示, 轮盘与轴之间由销钉联接. 本文仅考虑对涡轮盘的最大等效应力 $(\sigma_{\max})$ 、平均周向应力 (σ_y) 、腹板区域最

大周向应力 (σ_{fu_max}) 和中心孔最大周向应力 (σ_{y_max}) 进行静强度约束. 优化目标取最小化涡轮盘的体积 (V), 随机参数取材料密度 (ρ)、最大转速 (n) 和应力准则值, 详见表 1.

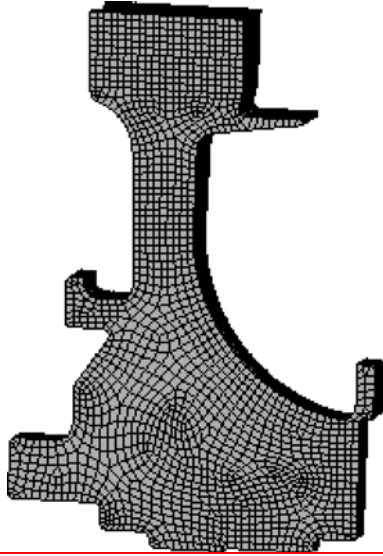


图 1 涡轮盘的有限元模型
Fig. 1 Turbine disk finite element model

表 1 随机参数
Table 1 Random parameters

随机参数	均值	标准差	变化系数	分布特征
$n/(\text{rad/s})$	1 198.0	59.9	0.05	Normal
$\rho/(\text{g/cm}^3)$	8.21	0.4105	0.05	Normal
σ_1/MPa	796.0	39.8	0.05	Normal
σ_2/MPa	453.75	22.7	0.05	Normal
σ_3/MPa	665.0	33.3	0.05	Normal
σ_4/MPa	857.2	42.9	0.05	Normal

注:表中 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 和 σ_4 分别为 $\sigma_{max}, \sigma_y, \sigma_{fu_max}$ 和 σ_{y_max} 的应力约束边界.

该涡轮盘可靠性优化的数学模型可以表示为

$$\begin{cases} \text{Min } V \\ \text{s. t. } P(R_i < 1) \leq P_F^* \quad (i = 1, 2, 3, 4) \\ R_1 = \sigma_{max} / \sigma_1 \\ R_2 = \sigma_y / \sigma_2 \\ R_3 = \sigma_{fu_max} / \sigma_3 \\ R_4 = \sigma_{y_max} / \sigma_4 \end{cases} \quad (15)$$

式中取目标失效概率 $P_F^* = 0.0013$.

取初始值和确定性优化的模型进行可靠性分

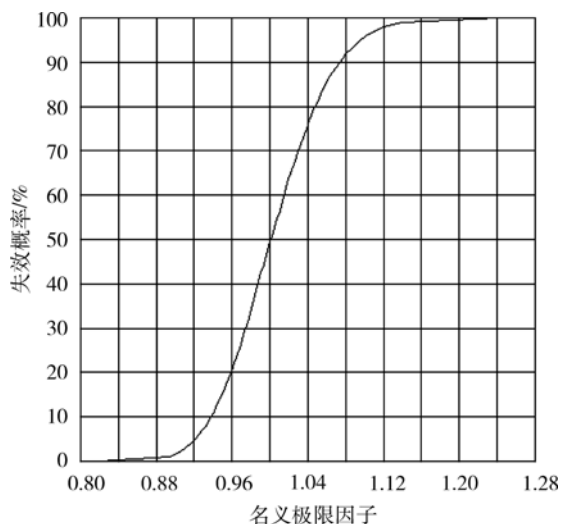
析. 以 R_1 为例, 取名义极限状态函数为 $R_{n1} = R_1(E(Z), X)$, 则 $M_1 = R_1 / R_{n1} = \sigma_{max} / \tilde{\sigma}_{max}$, 其中 $\tilde{\sigma}_{max}$ 表示随机变量取均值时的涡轮盘最大等效应力. 表 2 是利用式(7)得到的 (η, P_F^*) 的样本值, 图 2 是对应的 (η, P_F^*) 的关系曲线. 从图 2 的曲线和表 2 的数据可以看出, 在两个不同的设计点, 对给定的一组失效概率, 其名义极限因子的误差很小, 大约在 10^{-3} 的量级. 因此可以认为, 对给定的目标概率 P_F^* , 名义极限因子 η 近似是个常数.

表 2 (η, P_F^*) 的样本计算结果比较 (MCS, $N=10^7$)

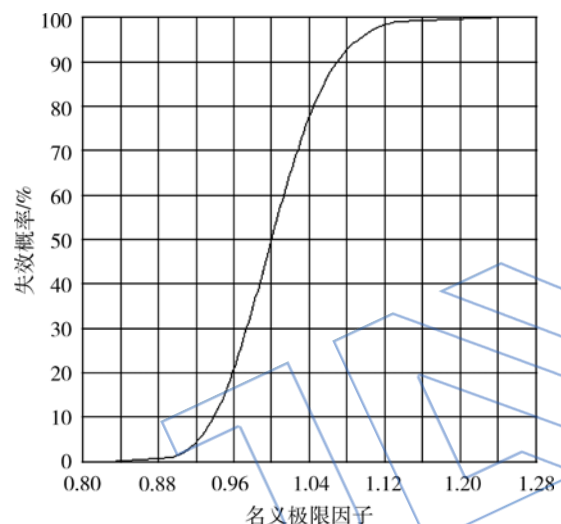
Table 2 Comparison of η and P_F^* (MCS, $N=10^7$)

P_F^*	η		相对误差
	原始设计	确定性优化设计	
0.400	1.01041	1.01160	1.17×10^{-3}
0.300	1.02476	1.02604	1.25×10^{-3}
0.200	1.04209	1.04332	1.18×10^{-3}
0.100	1.06678	1.06820	1.33×10^{-3}
0.080	1.07400	1.07527	1.18×10^{-3}
0.060	1.08264	1.08402	1.27×10^{-3}
0.040	1.09432	1.09569	1.25×10^{-3}
0.020	1.11247	1.11411	1.47×10^{-3}
0.010	1.12987	1.13070	7.34×10^{-4}
0.008	1.13473	1.13578	9.25×10^{-4}
0.006	1.14102	1.14219	1.03×10^{-3}
0.004	1.15089	1.15113	2.09×10^{-4}
0.002	1.16557	1.16554	2.57×10^{-5}
0.001	1.17891	1.17944	4.50×10^{-4}

MCS 方法的计算精度严重依赖于样本的大小, 在样本不足够大时通常存在波动, 对于处于 10^{-3} 量级的失效概率而言, 该波动容易产生较大误差. 以解析计算为基础的 FORM 和 DRM 相当稳定, 但是 FORM 对于非线性化较大的问题存在较大误差. 为了验证 DRM 的计算精度, 以确定性优化的结果模型进行可靠性分析. 把通过 MCS 方法(选取样本量 $N=10^7$)得到的极限因子带入到式(7)中, 如果使用 DRM 求得到失效概率值与 FORM 求得的失效概率值相比更加接近 MCS 方法的结果的话, 则说明 DRM 的精度更高. 通过表 3 可以看出, DRM 的结果更加接近 MCS 方法的结果, 但是所需的计算次数和时间要远小于 MCS 方法. 表 4 是根据 FORM 和 DRM 两种方法求得的样本, 通过插值得到 $P_F^* = 0.0013$ 时每个概率约束的名义极限因子, 从中也可以看出, DRM 的



(a) 原始设计



(b) 确定性优化设计

图2 概率与安全因子关系曲线

Fig. 2 Curve of probabilistic vs safety factor

表3 R_i 的 η 对应的 P_F 结果比较Table 3 Comparison of P_F to η on R_i

η	$P_F / \%$		
	MCS($N=10^7$)	FORM	DRM
1.00	48.70	49.68	48.74
1.02	33.92	34.80	33.97
1.04	21.68	22.35	21.70
1.06	12.60	13.17	12.72
1.08	6.84	7.14	6.86
1.10	3.42	3.57	3.42
1.12	1.60	1.66	1.58
1.14	0.70	0.71	0.70
1.16	0.26	0.29	0.27
1.18	0.09	0.11	0.10

表4 $P_F^*=0.0013$ 的 η 值比较Table 4 Comparison of η values($P_F^*=0.0013$)

	MCS($N=10^7$)	FORM	DRM
花费时间 t/min	≈ 15	≈ 1	≈ 1
η_1	1.1740	1.1768	1.1748
η_2	1.1966	1.1944	1.1965
η_3	1.2343	1.2309	1.2356
η_4	1.1760	1.1769	1.1769

结果更加接近 MCS($N=10^7$) 的结果. 其中由于 R_i 的线性化程度较高, FORM 和 DRM 的结果基本一致.

求得目标失效概率 P_F^* 对应的名义极限因子 η 之后, 原来的可靠性优化模型就转化成一个确定性的结构优化问题, 优化模型如下:

$$\begin{cases} \text{Min } V \\ \text{s. t. } \eta R_{ni} \leq 1 \quad (i=1, 2, 3, 4) \end{cases} \quad (16)$$

式中 R_{ni} 为 R_i 相对应的名义极限状态函数, 且 $R_{ni} = R_i(E(Z), X)$. 其优化结果如表5中所示, 名义极限因子法与 DLO 方法的优化结果大致相同, 但是计算效率上名义极限因子方法要远高于 DLP 方法, 接近于确定性优化的效率.

表5 优化结果比较

Table 5 Comparison of optimization results

	确定性优化	DLP 法	极限因子法
花费时间 t/h	≈ 7.5	≈ 26.5	≈ 10.1
$\sigma_{\max}/\text{MPa}$	786.09	818.26	818.26
σ_y/MPa	704.31	726.38	726.38
$\sigma_{u_{\max}}/\text{MPa}$	416.38	429.37	429.37
$\sigma_{y_{\max}}/\text{MPa}$	646.56	656.87	656.87
V/mm^3	53015.0	51400.21	51469.74

3 结论

1) 对于涡轮盘结构, 当选择 $R_i = R(E(Z), X)$ 为名义极限状态函数时, 其可靠性约束的失效概率对应的极限状态因子并不随设计变量的改变发生显著变化, 近似可以看作是一个常数.

2) 采用降维方法 (DRM) 获得的目标失效概率对应的名义极限因子较 FORM 获得的结果更接近 MCS 的结果, 而计算量要比 MCS 方法小, 效率更高.

3) 采用名义极限因子法,可以把对涡轮盘的可靠性优化转化为一个确定性的结构优化问题,其结果与采用传统的 DLO 方法相比数值上比较接近,但是效率更占优势,在不考虑预分析的情况下,接近确定性优化的效率。

参考文献:

- [1] Chen X, Hasselman T K, Neill D. Reliability based structural design optimization for practical applications[R]. AIAA-1997-1403, 1997.
- [2] Liang J, Mourelatos Z P, Tu J. A single-loop method for reliability-based design optimization[C]// ASME 2004 Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference, Salt Lake City UT, USA: ASME, 2004.
- [3] Shan S, Wang G G. Reliable design space and complete single-loop reliability-based design optimization[J]. Reliability Engineering and System Safety, 2008, 93(8): 1218-1230.
- [4] Du X, Sudjianto A, Chen W. An integrated framework for probabilistic optimization using inverse reliability strategy [C]// ASME 2003 Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference, Chicago IL, USA: ASME, 2003.
- [5] Ching J, Hsu W C. Transforming reliability limit-state constraints into deterministic limit-state constraints[J]. Structural Safety, 2008, 30(1): 11-33.
- [6] Ching J, Hsu W C. Approximate optimization of systems with high-dimensional uncertainties and multiple reliability constraints[J]. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 2008, 198(1): 52-71.
- [7] Naess A, Leira B J, Batsevych O. System reliability analysis by enhanced Monte Carlo simulation[J]. Structural Safety, 2009, 31(5): 349-355.
- [8] Frank G. Adaptive radial-based importance sampling method for structural reliability[J]. Structural Safety, 2008, 30(6): 533-542.
- [9] Au S K. Reliability-based design sensitivity by efficient simulation[J]. Computers and Structures, 2005, 83(14): 1048-1061.
- [10] Melchers R E, Ahammed M. A fast approximate method for parameter sensitivity estimation in Monte Carlo structural reliability[J]. Computers and Structures, 2004, 82(1): 55-61.
- [11] Manolis P, Nikos D L. Reliability-based structural optimization using neural networks and Monte Carlo simulation[J]. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 2002, 191(32): 3491-3507.
- [12] Rahman S, Xu H. A univariate dimension-reduction method for multi-dimensional integration in stochastic mechanics[J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 2004, 19(4): 393-408.
- [13] Rahman S, Wei D. A univariate approximation at most probable point for higher-order reliability analysis[J]. International Journal of Solids and Structures, 2006, 43(9): 2820-2839.
- [14] Lee I, Choi K K, Du L, et al. Inverse analysis method using MPP-based dimension reduction for reliability-based design optimization of nonlinear and multi-dimensional systems[J]. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 2008, 198(1): 14-27.